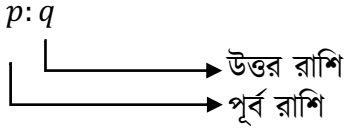
অধ্যায় ১১

বীজগাণিতিক অনুপাত ও সমানুপাত

MAIN TOPIC

অনুপাত: **একই এককে সমজাতীয় দুইটি রাশির পরিমাণের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ভগ্নাংশটিকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।**

যেমন: p ও q দুইটি সমজাতীয় রাশি এবং একই এককে প্রকাশিত হতে হবে। অতএব অনুপাতটি-

সমানুপাত: যদি চারটি রাশি এরূপ হয় যে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত উৎপন্ন হয়। a, b, c, d এরূপ চারটি রাশি হলে আমরা লিখি $a: b = c: d$ যা সমানুপাতের উদাহরণ।

ক্রমিক সমানুপাত:

- a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী বলতে বোঝায় $a: b = b: c$
- a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি $b^2 = ac$ হয়।
- ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি এক জাতীয় হতে হবে।
- এক্ষেত্রে c কে a ও b এর তৃতীয় সমানুপাতী এবং b কে a ও c এর মধ্য সমানুপাতী বলা হয়।

ধারাবাহিক অনুপাত:

দুই অনুপাত যদি ক:খ এবং খ:গ আকারের হয় তাহলে এদেরকে সাধারণ ক:খ:গ আকারে লেখা যায়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়।

অনুপাতের রূপান্তর:

এখানে অনুপাতের রাশিগুলো ধনাত্মক সংখ্যা।

ক) প্রমাণ কর যে, $a: b = c: d$ হলে, $b: a = d: c$ [ব্যস্তকরণ (Invertendo)]

$\Rightarrow$ দেওয়া আছে, $a: b = c: d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $ad = bc$

বা, $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$ [উভয়পক্ষকে ac দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

বা, $d : c = b : a$

$\therefore b : a = d : c$ (প্রমাণিত)

খ) প্রমাণ কর যে, $a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$ [একান্তরকরণ (Alternendo)]

$\Rightarrow$ দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $ad = bc$

বা, $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$ [উভয়পক্ষকে cd দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\therefore a : c = b : d$ (প্রমাণিত)

গ) প্রমাণ কর যে, $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ [যোজন (Componendo)]

$\Rightarrow$ দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$

$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (প্রমাণিত)

ঘ) প্রমাণ কর যে, $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ [বিয়োজন (Dividendo)]

$\Rightarrow$ দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (প্রমাণিত)

ঙ) প্রমাণ কর যে, $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [যোজন-বিয়োজন (Componendo-Dividendo)]

$\Rightarrow$ দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

যোজন করে পাই, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ldots\ldots(i)$

আবার, বিয়োজন করে পাই, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

বা, $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}\ldots\ldots(ii)$ [ব্যস্তকরণ]

সুতরাং, $\frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d}$ [(i) ও (ii) গুণ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ [এখানে $a\neq b, c\neq d$] **(প্রমাণিত)**

চ) প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ হলে প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

$\Rightarrow$ মনে করি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\text{k}$

$\therefore a=bk, c=dk, e=fk, g=hk$

$\therefore \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{bk+dk+fk+hk}{b+d+f+h}=\frac{k(b+d+f+h)}{b+d+f+h}$

কিন্তু k প্রদত্ত সমানুপাতের প্রত্যেকটি অনুপাতের সমান।

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$ **(প্রমাণিত)**

সমানুপাতিক ভাগ:

কোনো রাশিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করাকে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়। S কে $a:b=c:d$ অনুপাতে ভাগ করতে হলে S কে $a+b+c+d$ ভাগ করে যথাক্রমে a,b,c,d ভাগ নিতে হয়। অতএব,

১ম অংশ $=S$ এর $\frac{a}{a+b+c+d}=\frac{Sa}{a+b+c+d}$

২য় অংশ $=S$ এর $\frac{b}{a+b+c+d}=\frac{Sb}{a+b+c+d}$

৩য় অংশ $=S$ এর $\frac{c}{a+b+c+d}=\frac{Sc}{a+b+c+d}$

৪র্থ অংশ $=S$ এর $\frac{d}{a+b+c+d}=\frac{Sd}{a+b+c+d}$

অর্থাৎ যেকোনো রাশিকে যেকোনো নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করা যায়।

সূত্রাবলী

- দুইটি সংখ্যার গুণফল $=$ সংখ্যাসদ্বয়ের ল.সা.গু $\times$ গ.সা.গু
- বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (\text{এক বাহুর দৈর্ঘ্য})^2$
- আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ
- সরল মুনাফা, $I = pnr$
- বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$
- আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$
- মুনাফা-আসল $=$ মুনাফা $+$ আসল

অনুপাতের কতিপয় রূপান্তর/ধর্ম: (সর্বক্ষেত্রে যদি $a : b = c : d$ হয়)

- ব্যস্তকরণ ধর্ম: $a : b = c : d$ হলে অর্থাৎ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ হলে, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ হবে।
- একান্তরকরণ ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ হবে। অথবা, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
- যোজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ হবে।
- বিয়োজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ হবে।
- যোজন-বিয়োজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হবে।
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$ হবে।
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ হবে।

TYPEWISE MATH

Type-1

১) $x=\frac{10pq}{p+q}$ হলে $\frac{x+5p}{x-5p}+\frac{x+5q}{x-5q}$ এর মান নির্ণয় কর। $(p\neq q)$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x=\frac{10pq}{p+q}$

বা, $\frac{x}{5p}=\frac{2q}{p+q}$

বা, $\frac{x+5p}{x-5p}=\frac{2q+p+q}{2q-p-q}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{x+5p}{x-5p}=\frac{p+3q}{q-p}\ldots\ldots(i)$

আবার, $x=\frac{10pq}{p+q}$

বা, $\frac{x}{5q}=\frac{2p}{p+q}$

বা, $\frac{x+5q}{x-5q}=\frac{2p+p+q}{2p-p-q}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{x+5q}{x-5q}=\frac{3p+q}{p-q}\ldots\ldots(ii)$

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\frac{x+5p}{x-5p}+\frac{x+5q}{x-5q}=\frac{p+3q}{q-p}+\frac{3p+q}{p-q}$$

$$=\frac{p+3q}{q-p}-\frac{3p+q}{q-p}$$

$$=\frac{p+3q-3p-q}{q-p}$$

$$=\frac{2q-2p}{q-p}$$

$$=\frac{2(q-p)}{q-p}=2$$ (Ans)

২) $p=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ এবং $q=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ হলে $\frac{p^2+3pq+q^2}{p^2-3pq+q^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $p=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ এবং $q=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

সুতরাং, $p+q=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2+\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2+2.\sqrt{1+x}.\sqrt{1-x}+\left(\sqrt{1-x}\right)^2+\left(\sqrt{1+x}\right)^2-2.\sqrt{1+x}.\sqrt{1-x}+\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$=\frac{1+x+1-x+1+x+1-x}{(1+x)-(1-x)}$$

$$=\frac{4}{2x}$$

$$=\frac{2}{x}$$

এবং $pq=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\times\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=1$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{p^2+3pq+q^2}{p^2-3pq+q^2}$

$$=\frac{p^2+2pq+q^2+pq}{p^2+2pq+q^2-5pq}$$

$$=\frac{(p+q)^2+pq}{(p+q)^2-5pq}$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2+1}{\left(\frac{2}{x}\right)^2-5.1}$$ [মান বসিয়ে]

$$=\frac{\frac{4}{x^2}+1}{\frac{4}{x^2}-5}$$

$$=\frac{\frac{4+x^2}{x^2}}{\frac{4-5x^2}{x^2}}$$

$$=\frac{4+x^2}{4-5x^2}$$ **(Ans)**

❖ **নিজে কর:** $x=\frac{8pq}{p+q}$ হলে $\frac{x+4p}{x-4p}+\frac{x+4q}{x-4q}$ এর মান নির্ণয় কর।

Type-2

১) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{3}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{3}$

বা, $\frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}} = \frac{1+3}{1-3}$

বা, $\frac{2}{-2\sqrt{1-x}} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$

বা, $\frac{1}{1-x} = 4$ [বর্গ করে]

বা, $4(1-x) = 1$

বা, $1 - x = \frac{1}{4}$

বা, $-x = \frac{1}{4} - 1$

বা, $x = 1 - \frac{1}{4}$

বা, $x = \frac{4-1}{4}$

$\therefore x = \frac{3}{4}$ (Ans)

২) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}; 2a > b > 0$ এবং $x \neq 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$

বা, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}+a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}-a-x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{2a+2x}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{2(a+x)}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{(a+x)^2}{\left(-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} = \frac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$

বা, $\frac{a^2+2ax+x^2}{a^2-x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+x^2}$

বা, $\frac{a^2+2ax+x^2+a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2-a^2+x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2+b^2-2bx+x^2}{b^2+2bx+x^2-b^2+2bx-x^2}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{2a^2+2ax}{2x^2+2ax} = \frac{2b^2+2x^2}{4bx}$

বা, $\frac{2(a^2+ax)}{2(x^2+ax)} = \frac{2(b^2+x^2)}{2.2bx}$

বা, $\frac{a^2+ax}{x^2+ax} = \frac{b^2+x^2}{2bx}$

বা, $\frac{a(a+x)}{x(x+a)} = \frac{b^2+x^2}{2b.x}$

বা, $\frac{a(a+x)}{(x+a)} = \frac{b^2+x^2}{2b}$

বা, $a = \frac{b^2+x^2}{2b}$

বা, $2ab = b^2 + x^2$

বা, $x^2 = 2ab - b^2$

$\therefore x = \sqrt{2ab - b^2}$ (Ans)

❖ **নিজে কর:**

i. $81\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

ii. $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

Type-3

১) $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = p$ হলে প্রমাণ কর যে, $p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = p$

বা, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{p+1}{p-1}$

বা, $\frac{2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} = \frac{p+1}{p-1}$

বা, $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{p+1}{p-1}$

বা, $\frac{1+x}{1-x} = \frac{(p+1)^2}{(p-1)^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{1+x}{1-x} = \frac{p^2+2p+1}{p^2-2p+1}$

বা, $\frac{1+x+1-x}{1+x-1+x} = \frac{p^2+2p+1+p^2-2p+1}{p^2+2p+1-p^2+2p-1}$

বা, $\frac{2}{2x} = \frac{2(p^2+1)}{4p}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{p^2+1}{2p}$

বা, $p^2 + 1 - \frac{2p}{x} = 0$

$\therefore p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$ (প্রমাণিত)

২) $\frac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$ হলে প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$

বা, $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a-b+c} = a(a+b)$

বা, $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b+c} = a$ [উভয়পক্ষকে $(a+b)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + ac$

বা, $b^2 = ac$

বা, $\frac{b\times b}{a} = c$

বা, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\therefore a, b, c$ ক্রমিক সমানুপাতী।

৩) $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$ হলে,

ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

খ) দেখাও যে, $\frac{x^3}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} - \frac{z^3}{c^2} = \frac{(x-y-z)^3}{(a-b-c)^2}$

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$

বা, $\frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{acy-bcx}{c^2}$

- $\frac{\text{লবগুলোর যোগফল}}{\text{হরগুলোর যোগফল}}$

$= \frac{abz-acy+bcx-abz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2}$

$= \frac{0}{a^2+b^2+c^2} = 0$

বা, $\frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{acy-bcx}{c^2}$

$\therefore \frac{abz-acy}{a^2} = 0$

বা, $abz - acy = 0$

বা, $abz = acy$

বা, $\frac{abz}{abc} = \frac{acy}{abc}$

$\therefore \frac{z}{c} = \frac{y}{b}$

আবার, $\frac{bcx-abz}{b^2} = 0$

বা, $bcx - abz = 0$

বা, $bcx = abz$

বা, $\frac{bcx}{abc} = \frac{abz}{abc}$

বা, $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ **(প্রমাণিত)**

খ) মনে করি, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$

$\therefore x = ak, y = bk, z = ck$

এখন, $L.H.S = \frac{x^3}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} - \frac{z^3}{c^2}$

$= \frac{(ak)^3}{a^2} - \frac{(bk)^3}{b^2} - \frac{(ck)^3}{c^2}$

$= \frac{a^3k^3}{a^2} - \frac{b^3k^3}{b^2} - \frac{c^3k^3}{c^2}$

$= ak^3 - bk^3 - ck^3$

$= k^3(a - b - c)$

$R.H.S = \frac{(x-y-z)^3}{(a-b-c)^2}$

$= \frac{(ak-bk-ck)^3}{(a-b-c)^2}$

$= k^3(a-b-c)$

$L.H.S = R.H.S$ (দেখানো হলো)

৪) a, b, c, d চারটি রাশি এবং $a: b = c: d$ হলে দেখাও যে, $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a: b = c: d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore a = bk$ এবং $c = dk$

$L.H.S = \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$

$= \frac{(bk)^2+bk.b+b^2}{(bk)^2-bk.b+b^2}$

$= \frac{b^2k^2+b^2k+b^2}{b^2k^2-b^2k+b^2}$

$= \frac{b^2(k^2+k+1)}{b^2(k^2-k+1)}$

$= \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

$R.H.S = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

$= \frac{(dk)^2+dk.d+d^2}{(dk)^2-dk.d+d^2}$

$= \frac{d^2k^2+d^2k+d^2}{d^2k^2-d^2k+d^2}$

$= \frac{d^2(k^2+k+1)}{d^2(k^2-k+1)}$

$= \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

$L.H.S = R.H.S$ (প্রমাণিত)

৫) $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে দেখাও যে, $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}+\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}-\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1} = \frac{2a+3b+2a+3b}{2a+3b-2a+3b}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{2x^2+2}{4x} = \frac{4a}{6b}$

বা, $\frac{2(x^2+1)}{4x} = \frac{2a}{3b}$

বা, $\frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a}{3b}$

বা, $3b(x^2+1) = 4ax$

$\therefore 3bx^2 - 4ax + 3b = 0$ **(প্রমাণিত)**

❖ **নিজে কর:**

i. $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতিক।

ii. $p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $p = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

iii. $lx = my = nz$ হলে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$

Type-4

১) একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত $5:12:13$ এবং পরিসীমা 30 সে.মি. হলে বৃহত্তর বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত $5:12:13$ এবং পরিসীমা 30 সে.মি.

মনে করি, বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য $5x$ সে.মি., $12x$ সে.মি. এবং $13x$ সে.মি.

প্রশ্নমতে, $5x + 12x + 13x = 30$

বা, $30x = 30$

বা, $x = 1$

$\therefore$ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $5, 12, 13$

প্রশ্নমতে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 13 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.

আয়তক্ষেত্রের আনুপাতিক চিত্র:

$\therefore$ কর্ণ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{13^2 + 5^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{169 + 25}$ সে.মি.

$= \sqrt{194}$ সে.মি.

প্রশ্নমতে, বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{194}$ সে.মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \left(\sqrt{194}\right)^2$ বর্গ সে.মি.

$= 194$ বর্গ সে.মি.

২) একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ r একক

এবং বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য a একক

$\therefore$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\pi r^2 = a^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{\pi r^2}$

$\Rightarrow a = r\sqrt{\pi}$

আবার, বৃত্তটির পরিসীমা $= 2\pi r$ বর্গ একক

এবং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= 4a$ বর্গ একক

তাহলে, বৃত্তটির পরিসীমা : বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা

$= 2\pi r : 4a$

$= 2\pi r : 4 \times r\sqrt{\pi}$

$= \pi : 2\sqrt{\pi}$ (Ans)

❖ নিজে কর:

একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে $3:4$ এবং $2:5$ হলে অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

Type-5

১) দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3:4$ এবং এদের ল.সা.গু. 180 হলে সংখ্যা দু'টির গ.সা.গু. এবং সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, দুইটি সংখ্যার অনুপাত $= 3:4$

মনে করি, একটি সংখ্যা $= 3x$ এবং অপর সংখ্যাটি $= 4x$

$3x$ ও $4x$ এর গ.সা.গু. $= x$

এবং $3x$ ও $4x$ এর ল.সা.গু. $= 12x$

প্রশ্নমতে, $12x = 180$

বা, $x = \frac{180}{12}$

$= 15$

$\therefore$ সংখ্যা দুটির গ.সা.গু.$= 15$

একটি সংখ্যা$= 3\times15 = 45$

এবং অপর একটি সংখ্যা$= 4\times15 = 60$ (Ans)

❖ নিজে কর:

দুইটি সংখ্যার অনুপাত $5:7$ এবং এদের গ.সা.গু. 4 হলে সংখ্যা দু'টির ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

Type-6

১) একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x ও প্রস্থ y হলে উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি পেলে এবং প্রস্থ 10% হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x মি.

এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ y মি.

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল xy বর্গমিটার

নতুন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= (x + x$ এর $10\%)$ মি.

$= \left(x + \frac{10x}{100}\right)$ মি.

$= \frac{100x+10x}{100}$ মি.

$= \frac{110x}{100}$ মি.

$= \frac{11x}{10}$ মি.

10% হ্রাস পাওয়ায়,

নতুন আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ $= (y - y$ এর $10\%)$ মি.

$= \left(y - \frac{10y}{100}\right)$ মি.

$= \frac{100y - 10y}{100}$ মি.

$= \frac{90y}{100}$ মি.

$= \frac{9y}{10}$ মি.

$\therefore$ নতুন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{11x}{10} \times \frac{9y}{10}\right)$ বর্গমিটার

$= \frac{99xy}{100}$ বর্গমিটার

যেহেতু $xy > \frac{99xy}{100}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় $= \left(xy - \frac{99xy}{100}\right)$ বর্গমিটার

$= \frac{100xy - 99xy}{100}$ বর্গমিটার

$= \frac{xy}{100}$ বর্গমিটার

$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস পায় $= \left(\frac{\frac{xy}{100}}{xy} \times 100\right)\% = 1\%$ **(Ans)**

২) একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান: মনেকরি, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য x টাকা।

তাহলে, ক্ষতি $= x$ এর 28%

$= x$ এর $\frac{28}{100}$ টাকা

$= \frac{28x}{100}$ টাকা

$= \frac{7x}{25}$ টাকা

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য $= \left(x - \frac{7x}{25}\right)$ টাকা

$= \frac{18x}{25}$ টাকা

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য : ক্রয়মূল্য $= \frac{18x}{25} : x$

$= \frac{18}{25} : 1$

$= 18 : 25$ (Ans)

❖ **নিজে কর:**

i. যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

ii. সাজু ও রাজুর ঋণের অনুপাত 15000: 12000। তারা 10% হারে ঋণ গ্রহন করে। 3 বছর পর রাজু সকল মুনাফা আসলের অর্ধেক শোধ করলো। রাজুর আর কত টাকা ঋণ থাকলো?

Type-7

১) পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল 5: 2। 6 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান: মনেকরি, 7 বছর পূর্বে পিতার বয়স ছিল $5x$ বছর

এবং 7 বছর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল $2x$ বছর

পিতার বর্তমান বয়স $(5x + 7)$ বছর

পুত্রের বর্তমান বয়স $(2x + 7)$ বছর

প্রশ্নমতে, $(5x + 7) + (2x + 7) = 70$

$\Rightarrow 5x + 7 + 2x + 7 = 70$

$\Rightarrow 7x + 14 = 70$

$\Rightarrow 7x = 70 - 14$

$\Rightarrow 7x = 56$

$\Rightarrow x = 8$

পিতার বর্তমান বয়স $(5\times8 + 7)$ বছর $= 47$ বছর

পুত্রের বর্তমান বয়স $(2\times8 + 7)$ বছর $= 23$ বছর

$\therefore$ 6 বছর পরে পিতার বয়স $(47 + 6)$ বছর $= 53$ বছর

6 বছর পরে পুত্রের বয়স $(23 + 6)$ বছর $= 29$ বছর (Ans)

❖ **নিজে কর:**

রোজ ও তার পিতার বর্তমান বয়সের অনুপাত $7:2$। 5 বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত $8:3$ হবে। রোজ ও তার পিতার বয়স 9 বছর পর কত হবে?

Type-8 (ধারাবাহিক অনুপাত)

১) একটি ত্রিভুজের তিন কোণের অনুপাত $3:4:5$, কোণ তিনটি ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত অনুপাত অনুসারে কোণ তিনটি যথাক্রমে $3x, 4x, 5x$। ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $= 180°$

প্রশ্নানুসারে, $3x + 4x + 5x = 180°$

$\Rightarrow 12x = 180°$

$\Rightarrow x = 15°$

অতএব, কোণ তিনটি হলো:

$3x = 3\times15° = 45°$

$4x = 4\times15° = 60°$

$5x = 5\times15° = 75°$ (Ans)

২) ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফি 171 রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুরের এবং মুশফিকুর ও মাশরাফির রানের অনুপাত $3:2$ হলে কে কত রান করেছে?

সমাধান: দেওয়া আছে, মোট রানের পরিমাণ $= 171$

এবং সাকিবের রান : মুশফিকুরের রান $= 3:2$

$= 3\times3:2\times3$ [3 দ্বারা গুণ করে]

$= 9:6$

আবার, মুশফিকুরের রান : মাশরাফির রান $= 3:2$

$= 3\times2:2\times2$ [2 দ্বারা গুণ করে]

$= 6:4$

এখন সাকিবের রান : মুশফিকুরের রান : মাশরাফির রান $= 9:6:4$

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল $= 9 + 6 + 4 = 19$

$\therefore$ সাকিবের রান $= \left(171 \text{ এর } \frac{9}{19}\right) = 81$ রান

মুশফিকুরের রান $= \left(171 \text{ এর } \frac{6}{19}\right) = 54$ রান

মাশরাফির রান $= \left(171 \text{ এর } \frac{4}{19}\right) = 36$ রান

∴ সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফির রান যথাক্রমে $81, 54, 36$ (Ans)

❖ **নিজে কর:**

- 10 বছর পূর্বে পিতা, ছেলে ও মায়ের বয়সের অনুপাত ছিল $5:2:4$। বর্তমানে পিতার বয়স, পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ। মায়ের বর্তমান বয়স কত?
- ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত $5:12:13$ এবং পরিসীমা 20 সেন্টিমিটার। বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে $3:4$ এবং $2:5$ হলে অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

SOLVED CQ

প্রশ্ন-০১:

দৃশ্যকল্প-১: $P = log\,5 + 16(log\,16 - log\,15) + 12(log\,25 - log\,24) + 7(log\,81 - log\,80)$

দৃশ্যকল্প-২: আলম, বশির, চিন্ময় ও দ্বৈত মোট 195000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে এবং এক বছর শেষে 26500 টাকা লাভ হয়। উক্ত ব্যবসার মূলধনের আলমের অংশ : বশিরের অংশ= $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$, বশিরের অংশ : চিন্ময়ের অংশ $= 4:5$ এবং চিন্ময়ের অংশ দ্বৈতের অংশ $= 5:6$। বছর শেষে লভ্যাংশের 60% উক্ত ব্যবসায় বিনিয়োগ করা হলো। অবশিষ্ট লভ্যাংশ তাদের মধ্যে বন্টন করা হলো।

ক) আলম, বশির, চিন্ময় ও দ্বৈতের মূলধনের সরল অনুপাত নির্ণয় কর।

খ) ব্যবসায় আলম কত টাকা বিনিয়োগ করেছিল? অবশিষ্ট লভ্যাংশ থেকে আলম কত পাবে?

গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে P এর সরল মান নির্ণয় কর।

১ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) ব্যবসার মূলধনে আলমের অংশ : বশিরের অংশ

$= \frac{1}{3}:\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\times6:\frac{1}{2}\times6$

$= 2:3 = 2\times4:3\times4 = 8:12$

বশিরের অংশ : চিন্ময়ের অংশ $= 4:5 = 4\times3:5\times3 = 12:15$

চিন্ময়ের অংশ : দ্বৈতের অংশ $= 5:6 = 5\times3:6\times3 = 15:18$

∴ আলম, বশির, চিন্ময় ও দ্বৈতের মূলধনের সরল অনুপাত $= 8:12:15:18$ (Ans)

খ) দেওয়া আছে, ব্যবসায় বিনিয়োগকৃত মোট মূলধন $= 195000$ টাকা

ব্যবসায় আলম বিনিয়োগ করেছিল $= 195000$ এর $\frac{8}{8+12+15+18}$ টাকা

$= 195000\times\frac{8}{53}$ টাকা

$= 29433.96$ টাকা

$= 29434$ টাকা (প্রায়) (Ans)

বছর শেষে লভ্যাংশ 26500 টাকা এবং এর $(100-60)$ বা 40% বিনিয়োগকারীদের মধ্যে বন্টন করা হলে

আলম পাবে $=$ (26500 এর 40%) এর $\frac{8}{8+12+15+18}$ টাকা

$= 10600$ এর $\frac{8}{53}$ টাকা

$= 1600$ টাকা (Ans)

গ) $P = log\,5 + 16(log\,16 - log\,15) + 12(log\,25 - log\,24) + 7(log\,81 - log\,80)$

$= log\,5 + 16\,log\frac{16}{15} + 12\,log\frac{25}{24} + 7\,log\frac{81}{80}$

$= log\,5 + log\left(\frac{16}{15}\right)^{16} + log\left(\frac{25}{24}\right)^{12} + log\left(\frac{81}{80}\right)^{7}$

$= log\left\{5.\frac{(2^4)^{16}}{(3.5)^{16}}.\frac{(5^2)^{12}}{(3.2^3)^{12}}.\frac{(3^4)^7}{(2^4.5)^7}\right\}$

$= log\left\{5.\frac{2^{64}}{3^{16}.5^{16}}.\frac{5^{24}}{3^{12}.2^{36}}.\frac{3^{28}}{2^{28}.5^7}\right\}$

$= log\left\{\frac{2^{64}.5^{25}.3^{28}}{2^{64}.3^{28}.5^{23}}\right\}$

$= log(5^2)$

$= 2\,log\,5$ (Ans)

প্রশ্ন-০২:

$ax = by = cz$

ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

খ) প্রমাণ কর যে, $(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$

গ) দেখাও যে, $\frac{x+y+z}{ax+by+cz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

২ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) মনে করি, $ax = by = cz = k$

তাহলে, $ax = k$ $by = k$ $cz = k$

$\therefore a = \frac{k}{x}$ $\therefore b = \frac{k}{y}$ $\therefore c = \frac{k}{z}$

$L.H.S = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$

$= \frac{\left(\frac{k}{x}\right)^2}{\frac{k}{y}.\frac{k}{z}} + \frac{\left(\frac{k}{y}\right)^2}{\frac{k}{z}.\frac{k}{x}} + \frac{\left(\frac{k}{z}\right)^2}{\frac{k}{x}.\frac{k}{y}}$

$$= \frac{\frac{k^2}{x^2}}{\frac{k^2}{yz}} + \frac{\frac{k^2}{y^2}}{\frac{k^2}{zx}} + \frac{\frac{k^2}{z^2}}{\frac{k^2}{xy}}$$

$$= \frac{k^2}{x^2} \times \frac{yz}{k^2} + \frac{k^2}{y^2} \times \frac{zx}{k^2} + \frac{k^2}{z^2} \times \frac{xy}{k^2}$$

$$= \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = R.H.S$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

$\therefore \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$ (Proved)

খ) মনে করি, $ax = by = cz = k$

তাহলে, $ax = k$ $by = k$ $cz = k$

$\therefore a = \frac{k}{x}$ $\therefore b = \frac{k}{y}$ $\therefore c = \frac{k}{z}$

$$L.H.S = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$= \left\{\left(\frac{k}{x}\right)^2 + \left(\frac{k}{y}\right)^2 + \left(\frac{k}{z}\right)^2\right\}\left\{\frac{1}{\left(\frac{k}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{k}{y}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{k}{z}\right)^2}\right\}$$

$$= \left\{\frac{k^2}{x^2} + \frac{k^2}{y^2} + \frac{k^2}{z^2}\right\} \times \left\{\frac{1}{\frac{k^2}{x^2}} + \frac{1}{\frac{k^2}{y^2}} + \frac{1}{\frac{k^2}{z^2}}\right\}$$

$$= \left\{\frac{k^2}{x^2} + \frac{k^2}{y^2} + \frac{k^2}{z^2}\right\} \times \left\{\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2}\right\}$$

$$= k^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \cdot \frac{1}{k^2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = R.H.S$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

$\therefore (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$ (Proved)

গ) মনে করি, $ax = by = cz = k$

তাহলে, $ax = k$ $by = k$ $cz = k$

$\therefore x = \frac{k}{a}$ $\therefore y = \frac{k}{b}$ $\therefore z = \frac{k}{c}$

$$L.H.S = \frac{x+y+z}{ax+by+cz}$$

$$= \frac{\frac{k}{a}+\frac{k}{b}+\frac{k}{c}}{a.\frac{k}{a}+b.\frac{k}{b}+c.\frac{k}{c}}$$

$$= \frac{k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{k+k+k}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = R.H.S$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

$\therefore \frac{x+y+z}{ax+by+cz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ (Showed)

প্রশ্ন-০৩:

$y = \frac{14mn}{m+n}$ এবং $p:q = q:r$

ক) দেখাও যে, $\frac{p}{r} = \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2}$

খ) প্রমাণ কর যে, $p^4q^4r^4\left(\frac{1}{p^6}+\frac{1}{q^6}+\frac{1}{r^6}\right) = p^6+q^6+r^6$

গ) $\frac{y+7m}{y-7m}+\frac{y+7n}{y-7n}$ এর মান নির্ণয় কর। $m \neq n$

৩ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, $p:q = q:r$

$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{q}{r}$

$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{q^2}{r^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{p^2+q^2}{q^2} = \frac{q^2+r^2}{r^2}$ [যোজন করে]

$\Rightarrow \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2} = \frac{q^2}{r^2}$ [একান্তরকরণ করে]

$\Rightarrow \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2} = \frac{pr}{r^2}$ [$\because \frac{p}{q} = \frac{q}{r} \quad \therefore pr = q^2$]

$$\Rightarrow \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2} = \frac{p}{r}$$

$$\therefore \frac{p}{r} = \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2}$$ (Showed)

খ) দেওয়া আছে, $p:q = q:r$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{q}{r}$$

$$\therefore q^2 = pr$$

$$L.H.S = p^4q^4r^4\left(\frac{1}{p^6}+\frac{1}{q^6}+\frac{1}{r^6}\right)$$

$$= \frac{p^4q^4r^4}{p^6} + \frac{p^4q^4r^4}{q^6} + \frac{p^4q^4r^4}{r^6}$$

$$= \frac{q^4r^4}{p^2} + \frac{p^4r^4}{q^2} + \frac{p^4q^4}{r^2}$$

$$= \frac{(pr)^2.r^4}{p^2} + \frac{(q^2)^4}{q^2} + \frac{p^4.(pr)^2}{r^2}$$

$$= r^6 + q^6 + p^6$$

$$= p^6 + q^6 + r^6 = R.H.S$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

$$\therefore p^4q^4r^4\left(\frac{1}{p^6}+\frac{1}{q^6}+\frac{1}{r^6}\right) = p^6+q^6+r^6$$ (Proved)

গ) দেওয়া আছে, $y = \frac{14mn}{m+n}$

বা, $\frac{y}{7m} = \frac{2n}{m+n}$

বা, $\frac{y+7m}{y-7m} = \frac{2n+m+n}{2n-n-m}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{y+7m}{y-7m} = \frac{3n+m}{n-m} \dots\dots (i)$

আবার, $y = \frac{14mn}{m+n}$

বা, $\frac{y}{7n} = \frac{2m}{m+n}$

বা, $\frac{y+7n}{y-7n} = \frac{2m+m+n}{2m-m-n}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{y+7n}{y-7n} = \frac{3m+n}{m-n} \dots\dots (ii)$

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\frac{y+7n}{y-7n}+\frac{y+7m}{y-7m}=\frac{3n+m}{n-m}+\frac{3m+n}{m-n}$$
$$=\frac{3n+m}{n-m}-\frac{3m+n}{n-m}$$
$$=\frac{3n+m-3m-n}{n-m}$$
$$=\frac{2n-2m}{n-m}$$
$$=\frac{2(n-m)}{n-m}=2$$ (Ans)

প্রশ্ন-০৪:

(i) $y^2=xz$ (ii) $p=26$ মিটার এবং $q=10$ মিটার

ক) (i) হতে দেখাও যে, $\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}=1$

খ) $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2}=\frac{(x+y)^2}{(y+z)^2}$ হলে, উদ্দীপকের আলোকে (i) নং প্রতিষ্ঠিত কর।

গ) যদি p ও q এর মানকে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বিবেচনা করা হয়, তবে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 20% হ্রাস পেলে ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে তা নির্ণয় কর।

৪ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, $y^2=xz$

$$L.H.S=\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}$$
$$=\frac{xz.y(x+y+z)^3}{(xy+yz+xz)^3}$$
$$=\frac{y^2.y(x+y+z)^3}{(xy+yz+y^2)^3} \quad [\because y^2=zx]$$
$$=\frac{y^3(x+y+z)^3}{y^3(x+y+z)^3}$$
$$=1=R.H.S$$

$\therefore L.H.S=R.H.S$

$\therefore \frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}=1$ (Proved)

খ) দেওয়া আছে, $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2} = \frac{(x+y)^2}{(y+z)^2}$

$\Rightarrow \frac{(y+z)^2}{y^2+z^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ [একান্তরকরণ করে]

$\Rightarrow \frac{y^2+2yz+z^2}{y^2+z^2} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \frac{y^2+2yz+z^2-y^2-z^2}{y^2+z^2} = \frac{x^2+2xy+y^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}$ [বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2yz}{y^2+z^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \frac{z}{y^2+z^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow xy^2 + xz^2 = x^2z + y^2z$

$\Rightarrow xz^2 - x^2z = y^2z - xy^2$

$\Rightarrow xz(z-x) = y^2(z-x)$

$\Rightarrow xz = y^2$

$\therefore y^2 = xz$ (Proved)

গ) এখানে, দৈর্ঘ্য $p = 26$ মিটার, প্রস্থ $q = 10$ মিটার

10% বৃদ্ধিতে দৈর্ঘ্য $= \left(26 + 26\times\frac{10}{100}\right)$ মি. $= 28.6$ মি.

20% হ্রাসে প্রস্থ $= \left(10 - 10\times\frac{20}{100}\right)$ মি. $= 8$ মি.

পূর্বের ক্ষেত্রফল $= 26\times10$ বর্গ মি. $= 260$ বর্গ মি.

নতুন ক্ষেত্রফল $= 28.6\times8$ বর্গ মি. $= 228.8$ বর্গ মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল হ্রাস $= (260 - 228.8)$ বর্গ মি. $= 31.2$ বর্গ মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস $= \frac{31.2}{260}\times100\% = 12\%$ (Ans)

প্রশ্ন-০৫:

$3na^2 - 4ma + 3n = 0, \frac{p}{q} = \frac{q}{r} = \frac{r}{s}$

ক) দুইটি সংখ্যার অনুপাত $5:7$ এবং তাদের ল.সা.গু 280। সংখ্যা দুইটির গ.সা.গু নির্ণয় কর।

খ) প্রমাণ কর যে, $a = \frac{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}+(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}-(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}$

গ) দেখাও যে, $(p^2 + q^2 + r^2)(q^2 + r^2 + s^2) = (pq + qr + rs)^2$

৫ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, দুইটি সংখ্যার অনুপাত $5:7$ এবং তাদের ল.সা.গু 280

মনে করি, সংখ্যা দুইটি $5x$ ও $7x$

$\therefore$ সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু $= 35x$ এবং গ.সা.গু $= x$

শর্তানুসারে, $35x = 280$

বা, $x = \frac{280}{35}$

$\therefore x = 8$

$\therefore$ সংখ্যা দুইটির গ.সা.গু 8 (Ans)

খ) দেওয়া আছে, $3na^2 - 4ma + 3n = 0$

$\Rightarrow 3na^2 + 3n = 4ma$

$\Rightarrow 3n(a^2 + 1) = 2m.2a$

$\Rightarrow \frac{a^2+1}{2a} = \frac{2m}{3n}$

$\Rightarrow \frac{a^2+1+2a}{a^2+1-2a} = \frac{2m+3n}{2m-3n}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2} = \frac{2m+3n}{2m-3n}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}} = \sqrt{\frac{2m+3n}{2m-3n}}$

$\Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}}{(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow \frac{a+1+a-1}{a+1-a+1} = \frac{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}+(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}-(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}$$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \frac{2a}{2} = \frac{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}+(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}-(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore a = \frac{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}+(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}{(2m+3n)^{\frac{1}{2}}-(2m-3n)^{\frac{1}{2}}}$$ (Proved)

গ) দেওয়া আছে, p, q, r, s ক্রমিক সমানুপাতী।

$\therefore \frac{p}{q} = \frac{q}{r} = \frac{r}{s}$

ধরি, $\frac{p}{q} = \frac{q}{r} = \frac{r}{s} = k$

$\therefore r = sk$

$q = rk = sk.k = sk^2$ $\quad [\because r = sk]$

$p = qk = sk^2.k = sk^3$ $\quad [\because q = sk^2]$

$L.H.S = (p^2 + q^2 + r^2)(q^2 + r^2 + s^2)$

$= \{(sk^3)^2+(sk^2)^2+(sk)^2\}\{(sk^2)^2+(sk)^2+s^2\}$

$= \{s^2k^6 + s^2k^4 + s^2k^2\}\{s^2k^4 + s^2k^2 + s^2\}$

$= s^2k^2\{k^4 + k^2 + 1\}\times s^2\{k^4 + k^2 + 1\}$

$= s^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

$R.H.S = (pq + qr + rs)^2$

$= (sk^3\times sk^2 + sk^2\times sk + sk\times s)^2$

$= (s^2k^5 + s^2k^3 + s^2k)^2$

$= \{s^2k(k^4 + k^2 + 1)\}^2$

$= s^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

$\therefore (p^2 + q^2 + r^2)(q^2 + r^2 + s^2) = (pq + qr + rs)^2$ (Showed)

প্রশ্ন-০৬:

(i) $m^3 - 3m^2n + 3m - n = 0$ (ii) $P = 30$ এবং $Q = 20$

ক) $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + \cdots$ ধারাটির কোন পদ 398?

খ) প্রমাণ কর যে, $m = \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}+(n-1)^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}-(n-1)^{\frac{1}{3}}}$

গ) একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $P\%$ বৃদ্ধি এবং প্রস্থ $Q\%$ হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

৬ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) প্রদত্ত ধারাটির সাধারণ অন্তর, $d = (8-5) = (11-8) = 3$

প্রথম পদ, $a = 5$

$\therefore$ ধারাটি সমান্তর ধারা।

ধরি, ধারাটির n তম পদ $= 398$

$\therefore a + (n-1)d = 398$

বা, $5 + (n-1)3 = 398$

বা, $n - 1 = \frac{398-5}{3}$

বা, $n - 1 = 131$

$\therefore n = 132$

$\therefore$ ধারাটির 132 তম পদ $= 398$ (Ans)

খ) দেওয়া আছে, $m^3 - 3m^2n + 3m - n = 0$

$$\Rightarrow m^3 + 3m = 3m^2n + n$$

$$\Rightarrow m^3 + 3m = n(3m^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{m^3+3m}{3m^2+1} = n$$

$$\Rightarrow \frac{m^3+3m+3m^2+1}{m^3+3m-3m^2-1} = \frac{n+1}{n-1}$$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \frac{(m+1)^3}{(m-1)^3} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{(m+1)^3}{(m-1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{n+1}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{m-1} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}}{(n-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{m+1+m-1}{m+1-m+1} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}+(n-1)^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}-(n-1)^{\frac{1}{3}}}$$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}+(n-1)^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}-(n-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\therefore m = \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}+(n-1)^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}-(n-1)^{\frac{1}{3}}}$$ (Proved)

গ) ধরি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= x$ এবং প্রস্থ $= y$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গ একক

দেওয়া আছে, $P = 30$ এবং $Q = 20$

$P\%$ বা 30% বৃদ্ধিতে পরিবর্তিত দৈর্ঘ্য $= \left(x + \frac{30x}{100}\right)$ একক

$= \frac{130x}{100} = \frac{13x}{10}$ একক

$Q\%$ বা 20% হ্রাসে পরিবর্তিত প্রস্থ $= \left(y - \frac{20x}{100}\right)$ একক

$= \frac{80y}{100} = \frac{8y}{10}$ একক

$\therefore$ পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল $= \frac{13x}{10} \times \frac{8y}{10} = \frac{104xy}{100}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পায় $= \frac{\frac{104xy}{100} - xy}{xy} \times 100\%$

$= \frac{xy(104-100)}{xy \times 100} \times 100\%$

$= 4\%$ (Ans)

প্রশ্ন-০৭:

একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। ইহার পরিসীমা একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমার সমান।

ক) $\frac{x^3+y^3}{x-y+Z} = x(x+y)$ হলে, দেখাও যে, x, y, z ক্রমিক সমানুপাতি।

খ) আয়তক্ষেত্রের কর্ণ ও বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

গ) আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% হ্রাস ও প্রস্থ 10% বৃদ্ধি পেলে এর ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

৭ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, $\frac{x^3+y^3}{x-y+Z} = x(x+y)$

বা, $\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-y+Z} = x(x+y)$

বা, $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y+Z} = x$ [উভয়পক্ষকে $(x+y)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 - xy + y^2 = x^2 - xy + xz$

বা, $y^2 = xz$

$\therefore x, y, z$ ক্রমিক সমানুপাতি (দেখানো হলো)

খ) দেওয়া আছে,

আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, $a = 40$ মি. এবং প্রস্থ, $b = 30$ মি.

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{40^2+30^2}$

$= 50$ মিটার

আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা $= 2(a+b) = 2(40+30) = 140$ মিটার

ধরি, বর্গক্ষেত্রটির একবাহু x মিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটির পরিসীমা $= 4x$ মিটার

প্রশ্নমতে, $4x = 140$ $\therefore x = 35$

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটির একবাহু $= 35$ মিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= 35\sqrt{2}$ মিটার

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের কর্ণ : বর্গক্ষেত্রের কর্ণ $= 50 : 35\sqrt{2} = 5\sqrt{2} : 7$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের কর্ণ এবং বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্যের অনুপাত $= 5\sqrt{2} : 7$ (Ans)

গ) দেওয়া আছে,

আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 40 মি. এবং প্রস্থ 30 মি.

$\therefore$ আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (40\times30)$ বর্গ মি.

$= 1200$ বর্গ মি.

দৈর্ঘ্য 10% হ্রাস পেলে নতুন দৈর্ঘ্য $= \left(40 - 40\times\frac{10}{100}\right)$ মি.

$= 36$ মি.

প্রস্থ 10% বৃদ্ধি পেলে নতুন প্রস্থ $= \left(30 + 30 \times \frac{10}{100}\right)$ মি.

$= 33$ মি.

$\therefore$ দৈর্ঘ্য 10% হ্রাস ও প্রস্থ 10% বৃদ্ধি পেলে নতুন ক্ষেত্রফল $= (36 \times 33) = 1188$ বর্গ মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল হ্রাস $= (1200 - 1188)$ বর্গ মি. $= 12$ বর্গ মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের শতকরা হ্রাস $= \frac{12}{1200} \times 100\% = 1\%$ (Ans)

প্রশ্ন-০৮:

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ক) দেখাও যে, $x = \frac{6ab}{a+b}$

খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{x+3a}{x-3a} + \frac{x+3b}{x-3b} = 2$

গ) যদি $a = 4$ এবং $b = 2$ হয় তবে x এর মান বের কর। যদি কোনো বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $x\%$ বৃদ্ধি পায় তবে এর ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

৮ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, $\frac{6}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$\Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{a+b}{ab}$

$\therefore x = \frac{6ab}{a+b}$ (দেখানো হলো)

খ) 'ক' হতে প্রাপ্ত, $x = \frac{6ab}{a+b}$

বা, $\frac{x}{3a} = \frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x+3a}{x-3a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{x+3a}{x-3a} = \frac{3b+a}{b-a} \ldots\ldots (i)$

আবার, $x = \frac{6ab}{a+b}$

বা, $\frac{x}{3b} = \frac{2a}{a+b}$

বা, $\frac{x+3b}{x-3b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{x+3b}{x-3b} = \frac{3a+b}{a-b} \ldots\ldots (ii)$

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\frac{x+3a}{x-3a} + \frac{x+3b}{x-3b} = \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b}$$
$$= \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$$
$$= \frac{3b+a-3a-b}{b-a}$$
$$= \frac{2b-2a}{b-a}$$
$$= \frac{2(b-a)}{(b-a)} = 2$$ (প্রমাণিত)

গ) $a = 4$ এবং $b = 2$ হলে, 'ক' হতে প্রাপ্ত সমীকরণ অনুসারে, $x = \frac{6.4.2}{3+2} = \frac{48}{6} = 8$

ধরি, বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ একক

$x\%$ বা 8% বৃদ্ধি পাওয়ায় বাহুর দৈর্ঘ্য $= (a + a$ এর $8\%)$ একক

$= \left(a + \frac{8a}{100}\right)$ একক

$= 1.08a$ একক

তখন বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দাঁড়ায় $= (1.08a)^2$ বর্গ একক

$= 1.1664a^2$ বর্গ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $= (1.1664a^2 - a^2)$ বর্গ একক $= 0.1664a^2$ বর্গ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের শতকরা বৃদ্ধি $= \frac{0.1664a^2}{a^2} \times 100\% = 16.64\%$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা 16.64% বৃদ্ধি পাবে। (Ans)

প্রশ্ন-০৯:

$\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} = p$ হলে,

ক) $\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) প্রমাণ কর যে, $p^2 + 1 = \frac{2p}{a}$

গ) $a = \frac{4}{5}$ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। 'খ' এর সত্যতা যাচাই কর।

৯ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} = p$

বা, $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}} = \frac{p+1}{p-1}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{2\sqrt{1+a}}{2\sqrt{1-a}} = \frac{p+1}{p-1}$

বা, $\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} = \frac{p+1}{p-1}$

∴ নির্ণেয় মান $\frac{p+1}{p-1}$ (Ans)

খ) 'ক' হতে প্রাপ্ত, $\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} = \frac{p+1}{p-1}$

বা, $\frac{1+a}{1-a} = \frac{(p+1)^2}{(p-1)^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{1+a}{1-a} = \frac{p^2+2p+1}{p^2-2p+1}$

বা, $\frac{1+a+1-a}{1+a-1+a} = \frac{p^2+2p+1+p^2-2p+1}{p^2+2p+1-p^2+2p-1}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{1}{a} = \frac{p^2+1}{2p}$

$\therefore p^2 + 1 = \frac{2p}{a}$ (প্রমাণিত)

গ) দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} = p$

বা, $\frac{\sqrt{1+\frac{4}{5}}+\sqrt{1-\frac{4}{5}}}{\sqrt{1+\frac{4}{5}}-\sqrt{1-\frac{4}{5}}} = p$ [$a = \frac{4}{5}$ বসিয়ে]

বা, $\frac{\sqrt{\frac{5+4}{5}}+\sqrt{\frac{5-4}{5}}}{\sqrt{\frac{5+4}{5}}-\sqrt{\frac{5-4}{5}}} = p$

বা, $\frac{\sqrt{\frac{9}{5}}+\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{9}{5}}-\sqrt{\frac{1}{5}}} = p$

বা, $\frac{\frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}} = p$

বা, $\frac{\frac{3+1}{\sqrt{5}}}{\frac{3-1}{\sqrt{5}}} = p$

বা, $\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = p$

বা, $\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = p$

বা, $2 = p$

$\therefore p = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $p = 2$ (Ans)

'খ' হতে প্রাপ্ত, $p^2 + 1 = \frac{2p}{a}$

$p = 2$ হলে, বামপক্ষ $= 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$p = 2$ এবং $a = \frac{4}{5}$ হলে, ডানপক্ষ $= \frac{2.2}{\frac{4}{5}} = 4 \times \frac{5}{4} = 5$ [সত্যতা প্রমাণিত হলো]

প্রশ্ন-১০:

$$x = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$$

ক) যখন, $m + 1 = p^3$ এবং $m - 1 = q^3$ তখন দেখাও যে, $x = \frac{p+q}{p-q}$

খ) প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

গ) $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$ হলে উপরোক্ত তথ্যটি প্রমাণ কর।

১০ নং প্রশ্নের উত্তর:

ক) দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$

$= \frac{\sqrt[3]{p^3}+\sqrt[3]{q^3}}{\sqrt[3]{p^3}-\sqrt[3]{q^3}}$ [যখন, $m + 1 = p^3$ এবং $m - 1 = q^3$]

$= \frac{p+q}{p-q}$

অর্থাৎ, $x = \frac{p+q}{p-q}$ (দেখানো হলো)

খ) দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}+\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}-\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{m+1}{m-1}$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1} = \frac{m+1+m-1}{m+1-m+1}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{2x^3+6x}{6x^2+2} = \frac{2m}{2}$

বা, $\frac{2(x^3+3x)}{2(3x^2+1)} = m$

বা, $\frac{x^3+3x}{3x^2+1} = m$

বা, $x^3 + 3x = 3mx^2 + m$

বা, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

$\therefore x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ) দেওয়া আছে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

বা, $x^3 + 3x = 3mx^2 + m$

বা, $x^3 + 3x = m(3x^2 + 1)$

বা, $\frac{x^3+3x}{3x^2+1} = m$

বা, $\frac{x^3+3x+3x^2+1}{x^3+3x-3x^2-1} = \frac{m+1}{m11}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = \frac{m+1}{m-1}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{2x}{2} = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$

$\therefore x = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ **(প্রমাণিত)**

SOLVED MCQ

১) $35:65$ এই অনুপাতের উত্তর পদ কত?

ক) 35 খ) 7 গ) 13 ঘ) 5

উত্তর: গ) 13

ব্যাখ্যা: অনুপাতটি $= 35:65$
উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে $= 7:13$
এখানে উত্তর পদ $= 13$

২) সোহেল ও রানা একটি কাজ 160 টাকায় করার চুক্তি নিল। এবং সোহেল 60 টাকা পেল। তাদের মজুরির অনুপাত কত?

ক) $3:5$ খ) $2:3$ গ) $5:3$ ঘ) $6:10$

উত্তর: ক) $3:5$

ব্যাখ্যা: রানা পেল $= (160 - 60)$ টাকা
$= 100$ টাকা

$$\therefore \frac{\text{সোহেলের মজুরি}}{\text{রানার মজুরি}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 3:5$$

৩) A, B, C, D এর মান যথাক্রমে $10, 25, 20, 50$ হলে নিচের কোন শর্তে এরা সমানুপাতিক?

ক) $A:C = B:D$ খ) $B:A = C:D$ গ) $A:B = D:C$ ঘ) $A:D = B:C$

উত্তর: ক) $A:C = B:D$

ব্যাখ্যা: এখানে, 10 ও 20 এর অনুপাত 25 ও 50 এর অনুপাতের সমান।
$10:20 = 25:50 = 1:2$ যা একটি সমানুপাত।
$\therefore A:C = B:D$

৪) দুইটি সম্পূরক কোণের অনুপাত $3:7$ হলে বৃহত্তর কোণ কত?

ক) $121°$ খ) $124°$ গ) $126°$ ঘ) $139°$

উত্তর: গ) $126°$

ব্যাখ্যা: দুইটি সম্পূরক কোণের যোগফল $= 180°$
কোণদ্বয়ের অনুপাত $3:7$
ধরি, দুটি কোণ $= 3x$ ও $7x$
প্রশ্নমতে, $3x + 7x = 180°$
বা, $10x = 180°$
বা, $x = 18°$
$\therefore$ বৃহত্তর কোণ $= 7\times18° = 126°$

৫) A ও B নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করে যথাক্রমে 3 ও 4 মিনিটে। A ও B এর গতিবেগের অনুপাত হবে-

ক) $3:4$ খ) $4:5$ গ) $4:3$ ঘ) $5:1$

উত্তর: গ) $4:3$

ব্যাখ্যা: ধরি, A ও B এর গতিবেগ v_A, v_B
অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$
A এর ক্ষেত্রে, $S = v_A t_A$
B এর ক্ষেত্রে, $S = v_B t_B$
$\therefore v_A t_A = v_B t_B$
বা, $\frac{v_A}{v_B} = \frac{t_B}{t_A}$
বা, $\frac{v_A}{v_B} = \frac{4}{3} = 4:3$

৬) যদি x এর 10% এবং y এর 25% সমান হয়, তাহলে $x:y$ কোনটি?

ক) $3:4$ খ) $4:3$ গ) $2:5$ ঘ) $5:2$

উত্তর: ঘ) $5:2$

ব্যাখ্যা: x এর $10\% = \frac{x\times10}{100} = \frac{x}{10}$
এবং y এর $25\% = \frac{y\times25}{100} = \frac{y}{4}$
প্রশ্নমতে,
$\frac{x}{10} = \frac{y}{4}$
বা, $\frac{x}{y} = \frac{10}{4}$
বা, $x:y = 5:2$

৭) $\frac{3m+n}{n-m} = 9$ হলে, $m:n = ?$

ক) $1:5$ খ) $5:1$ গ) $2:3$ ঘ) $3:2$

উত্তর: গ) $2:3$

ব্যাখ্যা: $\frac{3m+n}{n-m} = 9$
বা, $3m + n = 9n - 9m$

বা, $12m = 8n$
$\therefore \frac{m}{n} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 2:3$

৮) দুইটি সংখ্যার অনুপাত $7:5$ হলে তাদের বর্গের সমষ্টি ও অন্তরের অনুপাত নির্ণয় কর।

ক) $49:25$ খ) $36:1$ গ) $37:12$ ঘ) $4:49$

উত্তর: গ) $37:12$

ব্যাখ্যা: মনে করি, সংখ্যা দুটি যথাক্রমে $7x$ ও $5x$।

$$\therefore \frac{\text{বর্গের সমষ্টি}}{\text{বর্গের অন্তর}} = \frac{(7x)^2+(5x)^2}{(7x)^2-(5x)^2} = \frac{49x^2+25x^2}{49x^2-25x^2} = \frac{74x^2}{24x^2} = \frac{37}{12} = 37:12$$

৯) কাগজের পূর্বমূল্য ও বর্তমান মূল্যের অনুপাত $2:3$ হলে পূর্বের তুলনায় শতকরা মূল্যের বৃদ্ধি নিচের কোনটি?

ক) 40% খ) 50% গ) 30% ঘ) 20%

উত্তর: খ) 50%

ব্যাখ্যা: পূর্বমূল্য : বর্তমান মূল্য $= 2:3$
$= (2\times50):(3\times50)$
$= 100:150$
$\therefore$ শতকরা মূল্য বৃদ্ধি $= (150 - 100)$ টাকা
$= 50$ টাকা

১০) a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে-

i) $b^2 = ac$ ii) $2b = a + c$ iii) $\frac{a+b}{b} = \frac{b+c}{c}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) ii, iii গ) i, iii ঘ) i, ii, iii

উত্তর: গ) i, iii

ব্যাখ্যা: a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে-
$a:b = b:c$
বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
বা, $b^2 = ac$
এখন, $b^2 = ac$
বা, $b = \sqrt{ac}$

$\therefore 2b = 2\sqrt{ac} \neq a + c$
আবার, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
বা, $\frac{a+b}{b} = \frac{b+c}{c}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১১ ও ১২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি বর্গক্ষেত্রে একটি বৃত্ত অন্তর্লিখিত হয়েছে।

১১) বর্গক্ষেত্রের এক বাহু ও বৃত্তটির ব্যাসার্ধের অনুপাত কত?

ক) $1:2$ খ) $2:1$ গ) $1:1$ ঘ) $1:3$

উত্তর: খ) $2:1$

ব্যাখ্যা: বর্গে অন্তর্লিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।
$\therefore$ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হলে,
বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{a}{2}$ একক
$\therefore$ বর্গের এক বাহু : বৃত্তের ব্যাসার্ধ $a:\frac{a}{2} = 2:1$

১২) বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা ও বৃত্তের পরিধির অনুপাত কত?

ক) $4:\pi$ খ) $\pi:4$ গ) $2:\pi$ ঘ) $\pi:2$

উত্তর: ক) $4:\pi$

ব্যাখ্যা: বর্গের পরিসীমা $= 4\times a = 4a$ একক
বৃত্তের পরিধি $= 2\pi\times\frac{a}{2} = \pi a$ একক
$\therefore$ বর্গের পরিসীমা : বৃত্তের পরিধি $= 4a:\pi a = 4:\pi$

১৩) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3}$ হলে, $\frac{a+c+e}{b+d+f} =$ কত?

ক) $\frac{2}{3}$ খ) $\frac{4}{9}$ গ) $\frac{8}{27}$ ঘ) $\frac{3}{2}$

উত্তর: ক) $\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3} = k$
$\frac{a}{b} = k$ $\frac{c}{d} = k$ $\frac{e}{f} = k$
বা, $a = bk$ বা, $c = dk$ বা, $e = fk$
$\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{bk+dk+fk}{b+d+f}$
$= \frac{k(b+d+f)}{b+d+f}$
$= k = \frac{2}{3}$

১৪) একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত $4:7$। ঐ মাঠে যেই জমিতে আগে 30.4 কুইন্টাল ধান ফলত। সেচ পাওয়ার পর তার ফলন কত কুইন্টাল?

ক) 53.2 খ) 54.3 গ) 53 ঘ) 54

উত্তর: ক) 53.2

ব্যাখ্যা: মনে করি,
সেচের সুযোগ আসার আগে ও পরের ফলনের পরিমাণ $4x$ ও $7x$।
প্রশ্নমতে, $4x = 30.4$
বা, $x = \frac{30.4}{4}$
বা, $x = 7.6$
$\therefore$ পরের ফলনের পরিমাণ $= 7 \times 7.6 = 53.2$

১৫) $a:b = c:d = e:f$ হলে-

i) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} = \frac{e-f}{e}$ ii) $\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$ iii) $a:c:e = b:d:f$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) ii, iii গ) i, iii ঘ) i, ii, iii

উত্তর: ঘ) i, ii, iii

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $a:b = c:d = e:f$
বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

এখন, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
বা, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ [বিয়োজন]
অনুরূপভাবে,
$\frac{c-d}{d} = \frac{e-f}{f}$
$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} = \frac{e-f}{f} \ldots\ldots (i)$
ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$
$\frac{a}{b} = k$ $\frac{c}{d} = k$ $\frac{e}{f} = k$
বা, $a = bk$ বা, $c = dk$ বা, $e = fk$
$\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{bk+dk+fk}{b+d+f} = \frac{k(b+d+f)}{b+d+f} = k = \frac{a}{b} \ldots\ldots (ii)$
আবার, $a:b = c:d$
একান্তরকরণের নিয়মানুযায়ী,
$a:c = b:d$
আবার, $a:b = e:f$
একান্তরকরণের নিয়মানুযায়ী,

$a: e = b: f$
ধারাবাহিক অনুপাত $= a: c: e = b: d: f \ldots \ldots (iii)$

১৬) ΔABC এর $\angle A: \angle B = 1: 2$ এবং $\angle B: \angle C = 2: 3$ হলে, $\angle C$ এর পরিমাণ-

ক) $90°$ খ) $60°$ গ) $45°$ ঘ) $30°$

উত্তর: ক) $90°$

ব্যাখ্যা: এখানে, $\angle A: \angle B = 1: 2$
$\angle B: \angle C = 2: 3$
$\therefore \angle A: \angle B: \angle C = 1: 2 :: 2: 3 = 1: 2: 3$
মনে করি, ৩টি কোণ $= x, 2x$ ও $3x$। তাহলে,
$x + 2x + 3x = 180°$
বা, $6x = 180°$
বা, $x = 30°$
$\therefore \angle C = 3x = 3\times30° = 90°$

১৭) একটি বর্গের বাহুকে 3 গুণ করা হলে, পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল পূর্বাপেক্ষা কত গুণ বৃদ্ধি পাবে?

ক) 3 খ) 6 গ) 8 ঘ) 9

উত্তর: গ) 8

ব্যাখ্যা: মনে করি, বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= x$ একক
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গ একক
তিনগুণ বৃদ্ধি করলে বাহুর দৈর্ঘ্য $= 3x$ একক
$\therefore$ বাহুর দৈর্ঘ্য পরিবর্তনে পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল $= (3x)^2$ বর্গ একক
$= 9x^2$ বর্গ একক
$\therefore$ পূর্বের ক্ষেত্রফল অপেক্ষা ক্ষেত্রফল বেশি $= (9x^2 - x^2) = 8x^2$ বর্গ একক

১৮) 261 টি আম তিন ভাইয়ের মধ্যে $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}:\frac{1}{9}$ অনুপাতে ভাগ করে দিলে, ১ম ভাই কয়টি আম পাবে?

ক) 45 খ) 81 গ) 90 ঘ) 135

উত্তর: ঘ) 135

ব্যাখ্যা: মনে করি, তিনটি ভাই এর মধ্যে আমের পরিমাণ যথাক্রমে $\frac{x}{3}, \frac{x}{5}, \frac{x}{9}$
প্রশ্নমতে, $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{9} = 261$
বা, $\frac{29x}{45} = 261$
বা, $x = \frac{261\times45}{29}$
বা, $x = 405$
$\therefore$ ১ম ভাইয়ের আমের পরিমাণ $= \frac{x}{3} = \frac{405}{3} = 135$ টি।

১৯) চালের পূর্বমূল্য : বর্তমান মূল্য $= 4:3$। পূর্বের তুলনায় মূল্য শতকরা কত ভাগ হ্রাস পেয়েছে?

ক) 22 টাকা　　খ) 20 টাকা　　গ) 30 টাকা　　ঘ) 25 টাকা

উত্তর: ঘ) 25 টাকা

ব্যাখ্যা: মনে করি, প্রদত্ত অনুপাত অনুসারে পূর্বমূল্য $= 4x$ ও বর্তমান মূল্য $= 3x$
হ্রাস পেয়েছে $= (4x - 3x) = x$
$\therefore$ শতকরা হ্রাস পেয়েছে $= \frac{x}{4x} \times 100\% = 25\%$

২০) যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 20% বৃদ্ধি পায়, তবে ক্ষেত্রফল শতকরা কত ভাগ বৃদ্ধি পাবে?

ক) 36　　খ) 44　　গ) 72　　ঘ) 80

উত্তর: খ) 44

ব্যাখ্যা: প্রশ্নমতে, ধরি, এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= x$ একক
20% বৃদ্ধিতে বাহুর দৈর্ঘ্য $= x + x$ এর 20%
$= x + x$ এর $\frac{20}{100}$
$= x + \frac{x}{5} = \frac{6x}{5}$
$\therefore$ পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{6x}{5}\right)^2 = \frac{36x^2}{25}$
$\therefore$ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $= \frac{36x^2}{25} - x^2 = \frac{36x^2 - x^2}{25} = \frac{11x^2}{25}$
$\therefore$ শতকরা ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $= \frac{\frac{11x^2}{25}}{x^2} \times 100\%$
$= \frac{11x^2}{25} \times \frac{1}{x^2} \times 100\%$
$= 44\%$

২১) রীনা ও মীনার বয়সের অনুপাত $5:3$, রীনার বয়স 15 বছর হলে কত বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত $7:5$ হবে?

ক) 5 বছর　　খ) 6 বছর　　গ) 7 বছর　　ঘ) 8 বছর

উত্তর: খ) 6 বছর

ব্যাখ্যা: $\frac{\text{রীনার বয়স}}{\text{মীনার বয়স}} = \frac{5}{3}$
বা, মীনার বয়স $= \frac{3}{5} \times 15$ বছর $= 9$ বছর
ধরি, x বছর পর বয়সের অনুপাত $7:5$ হবে।
প্রশ্নমতে, $\frac{15+x}{9+x} = \frac{7}{5}$
বা, $75 + 5x = 63 + 7x$
বা, $2x = 12 \Rightarrow x = 6$ বছর

২২) দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3:5$ এবং তাদের ল.সা.গু 75 হলে সংখ্যা দুইটির গ.সা.গু কত?

ক) 1 খ) 3 গ) 5 ঘ) 15

উত্তর: গ) 5

ব্যাখ্যা: মনে করি, সংখ্যাগুলো $3x$ ও $5x$
$\therefore 3x, 5x$ এর ল.সা.গু $= (3\times5)\times x = 15x$
প্রশ্নমতে, $15x = 75$
বা, $x = \frac{75}{15} = 5$
$\therefore$ সংখ্যাগুলোর গ.সা.গু $= 5$

২৩) জ্বালানি ও তেলের দাম 15% বৃদ্ধি পেয়েছে। ঢাকা-চট্টগ্রাম বাস ভাড়াও একই হারে বৃদ্ধি পেয়েছে। পুরাতন ও নতুন ভাড়ার অনুপাত কত?

ক) $18:22$ খ) $12:21$ গ) $17:28$ ঘ) $20:23$

উত্তর: ঘ) $20:23$

ব্যাখ্যা: জ্বালানি ও তেলের দাম 15% বৃদ্ধিতে নতুন ভাড়া $= (100 + 15)$
$= 115$ টাকা
$\therefore$ পুরাতন ভাড়া : নতুন ভাড়া $= 100:115$
$= 20:23$

২৪) $5:9$ অনুপাতটির প্রতিটি সংখ্যার সাথে কত যোগ করলে অনুপাত $3:4$ হবে?

ক) 1 খ) 7 গ) 9 ঘ) 12

উত্তর: খ) 7

ব্যাখ্যা: মনে করি,
x যোগ করলে অনুপাতটি $3:4$ হবে।
প্রশ্নমতে, $\frac{5+x}{9+x} = \frac{3}{4}$
বা, $27 + 3x = 20 + 4x$
বা, $x = 7$

২৫) আখের রসে চিনি ও পানির অনুপাত $3:7$ হলে, এতে কী পরিমাণ চিনি আছে?

ক) 70% খ) 42.80% গ) 40% ঘ) 30%

উত্তর: ঘ) 30%

ব্যাখ্যা: চিনি ও পানির অনুপাত $= 3:7$
অনুপাতের রাশিদ্বয়ের যোগফল $= (3 + 7) = 10$
$\therefore$ আখের রসে শতকরা চিনির পরিমাণ $= \frac{3}{10}\times100\% = 30\%$

২৬) যদি $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ হয়, তবে $\frac{a+b+c}{c}$ এর মান কত?

ক) 4 খ) 2 গ) 3 ঘ) 5

উত্তর: খ) 2

ব্যাখ্যা: মনে করি, $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = \text{k}$

$\therefore a = 3k, b = 4k, c = 7k$

$\therefore \frac{a+b+c}{c} = \frac{3k+4k+7k}{7k} = \frac{14k}{7k} = 2$

২৭) $x: y = 3: 5, y: z = 15: 6$ হলে-

i) $x: z = 9: 6$ ii) $x: y: z = 3: 5: 2$ iii) $y > x > z$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) ii, iii গ) i, iii ঘ) i, ii, iii

উত্তর: ঘ) i, ii, iii

ব্যাখ্যা: এখানে, $x: y = 3: 5$

আবার, $y: z = 15: 6$

$= \frac{15}{3} : \frac{6}{3}$

$= 5: 2$

$\therefore x: y: z = 3: 5: 2$

$\therefore x: z = 3: 2$

$= (3\times3)(2\times3)$

$= 9: 6$

$\therefore x: y: z = 3: 5: 2$

$\therefore y > x > z$

২৮) তিনজন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$ হলে-

i) ১ম জেলে পায় 200 টি ii) ২য় জেলে পায় 240 টি iii) ৩য় জেলে পায় 300 টি

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) ii, iii গ) i, iii ঘ) i, ii, iii

উত্তর: ক) i, ii

ব্যাখ্যা: জেলেদের মাছের অনুপাত $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$

ধরি, প্রত্যেকের মাছের পরিমাণ $= \frac{2x}{3}, \frac{4x}{5}$ ও $\frac{5x}{6}$ টি

এখন, $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{5} + \frac{5x}{6} = 690$

বা, $\frac{69x}{30} = 690$
বা, $x = \frac{690\times30}{69}$
বা, $x = 300$
$\therefore$ ১ম জেলে পায় $= \frac{2\times300}{3} = 200$ টি
$\therefore$ ২য় জেলে পায় $= \frac{4\times300}{5} = 240$ টি
$\therefore$ ৩য় জেলে পায় $= \frac{5\times300}{6} = 250$ টি

২৯) 1011 টাকা মিতু, সারা ও মিনুকে $\frac{4}{5}:\frac{3}{4}:\frac{6}{7}$ অনুপাতে ভাগ করে দেয়া হলো। অনুপাতত্রয়ের সরল অনুপাত নিচের কোনটি?

ক) $3:4:6$ খ) $4:5:7$ গ) $35:36:40$ ঘ) $112:105:120$

উত্তর: ঘ) $112:105:120$

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত অনুপাত $\frac{4}{5}:\frac{3}{4}:\frac{6}{7}$
$= \frac{4}{5}\times140:\frac{3}{4}\times140:\frac{6}{7}\times140$
$= (4\times28):(3\times35):120$
$= 112:105:120$

৩০) দুটি রাশির অনুপাত $1:2$ এবং তাদের অন্তরফল 37 হলে, বৃহত্তম সংখ্যাটি কত?

ক) 57 খ) 67 গ) 74 ঘ) 83

উত্তর: গ) 74

ব্যাখ্যা: মনে করি,
সংখ্যা দুটি x ও $2x$
প্রশ্নমতে, $2x - x = 37$
বা, $x = 37$
বৃহত্তম সংখ্যা $= 2\times37 = 74$

৩১) দুটি সংখ্যার অনুপাত $7:10$ ও ল.সা.গু $= 910$ হলে, সংখ্যা দুটির অনুপাত কত?

ক) 39 খ) 91 গ) 130 ঘ) 221

উত্তর: ক) 39

ব্যাখ্যা: ধরি, সংখ্যাদ্বয় $7x$ ও $10x$।
$\therefore$ $7x$ ও $10x$ এর ল.সা.গু $= 910$
প্রশ্নমতে, $7\times10\times x = 910$
বা, $70x = 910$
বা, $x = 13$
$\therefore 7x = 7\times13 = 91$

$\therefore 10x = 10\times13 = 130$
$\therefore$ সংখ্যা দুটির অন্তর $= 130 - 91 = 39$

৩২) যদি $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ হয় তবে, $\frac{6x+y}{3x+2y}$ এর মান কত?

ক) $\frac{4}{5}$ খ) $\frac{14}{15}$ গ) $\frac{5}{4}$ ঘ) $\frac{20}{13}$

উত্তর: গ) $\frac{5}{4}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$
বা, $3x = 2y$
বা, $x = \frac{2y}{3}$
প্রদত্ত রাশি $= \frac{6x+y}{3x+2y} = \frac{6.\frac{2y}{3}+y}{3.\frac{2y}{3}+2y} = \frac{4y+y}{2y+2y} = \frac{5y}{4y} = \frac{5}{4}$

৩৩) যদি $2amn = x(m^2 + n^2)$ হয় তবে, $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} =$ কত?

ক) $\frac{m}{n}$ খ) $\frac{m+n}{m-n}$ গ) $\frac{m-n}{m+n}$ ঘ) $\frac{n}{m}$

উত্তর: খ) $\frac{m+n}{m-n}$

ব্যাখ্যা: $2amn = x(m^2 + n^2)$
বা, $\frac{a}{x} = \frac{m^2+n^2}{2mn}$
বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{m^2+n^2+2mn}{m^2+n^2-2mn}$
বা, $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{m+n}{m-n}$

৩৪) পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স 40 বছর ও 10 বছর, 5 বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে ?

ক) $4:1$ খ) $3:1$ গ) $1:4$ ঘ) $1:3$

উত্তর: খ) $3:1$

ব্যাখ্যা: পিতার বর্তমান বয়স 40 বছর।
$\therefore$ 5 বছর পর পিতার বয়স হবে $= (40 + 5)$ বছর
$= 45$ বছর
পুত্রের বর্তমান বয়স $= 10$ বছর।
$\therefore$ 5 বছর পর পুত্রের বয়স $= (10 + 5)$ বছর
$= 15$ বছর
$\therefore$ 5 বছর পর পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত $= 45:15 = 3:1$

৩৫) একটি দ্রব্য 20% লাভে বিক্রয় করা হলো, ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের অনুপাত কোনটি

ক) $5:4$ খ) $6:5$ গ) $5:6$ ঘ) $4:5$

উত্তর: গ) $5:6$

ব্যাখ্যা: 20% লাভে ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $= (100+20)$
$= 120$ টাকা

$\therefore \frac{\text{ক্রয়মূল্য}}{\text{বিক্রয়মূল্য}} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} = 5:6$

৩৬) একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত $3:2$। যদি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ ও প্রস্থ অর্ধেক করা হয়, তবে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পূর্বের ক্ষেত্রফলের-

ক) দ্বিগুণ হবে খ) অর্ধেক হবে গ) দেড়গুণ হবে ঘ) সমান হবে

উত্তর: ঘ) সমান হবে

ব্যাখ্যা: মনে করি,
দৈর্ঘ্য $= 3x$
প্রস্থ $= 2x$
ক্ষেত্রফল $= (3x \times 2x)$ বর্গ একক $= 6x^2$ বর্গ একক
দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করলে, নতুন দৈর্ঘ্য $= 3x \times 2 = 6x$
প্রস্থ অর্ধেক করলে, নতুন প্রস্থ $= \frac{2x}{2} = x$
$\therefore$ পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল $= (6x \times x)$ বর্গ একক $= 6x^2$ বর্গ একক
$\therefore$ সমান থাকবে।

৩৭) A ও B এর আয়ের অনুপাত $5:4$ এবং B ও C এর অনুপাত $3:4$। A এর আয় 60 টাকা হলে, B ও C এর আয় কত?

ক) 48 টাকা, 64 টাকা খ) 48 টাকা, 50 টাকা

গ) 64 টাকা, 40 টাকা ঘ) 40 টাকা, 60 টাকা

উত্তর: ক) 48 টাকা, 64 টাকা

ব্যাখ্যা: A এর আয় 5 টাকা হলে, B এর 4 টাকা
$\therefore A$ এর আয় 1 টাকা হলে, B এর $\frac{4}{5}$ টাকা
$\therefore A$ এর আয় 60 টাকা হলে, B এর $\frac{4\times60}{5}$ টাকা
$= 48$ টাকা
$\therefore C$ এর আয় $= \left(48\times\frac{4}{3}\right)$ টাকা $= 64$ টাকা

৩৮) 7500 টাকা $1:2:3:4:5$ অনুপাতে ভাগ করলে বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর অংশের পার্থক্য কত হবে?

ক) 2000 খ) 2500 গ) 2600 ঘ) 3000

উত্তর: ক) 2000

ব্যাখ্যা: অনুপাতগুলোর যোগফল $= (1+2+3+4+5) = 15$
$\therefore$ বৃহত্তম অংশ $= \left(7500\times\frac{5}{15}\right)$
$= (500\times5)$
$= 2500$
$\therefore$ ক্ষুদ্রতম অংশ $= \left(7500\times\frac{1}{15}\right)$
$= 500$
$\therefore$ পার্থক্য $= (2500-500)$ টাকা
$= 2000$ টাকা

৩৯) একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10 মিটার, প্রস্থ 5 মিটার। এর দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 10% হ্রাসে এর ক্ষেত্রফল-

ক) 1% বৃদ্ধি পাবে খ) 1% কমবে গ) 21% বাড়বে ঘ) একই থাকবে

উত্তর: খ) 1% কমবে

ব্যাখ্যা: দৈর্ঘ্য $= 10$ মিটার
প্রস্থ $= 5$ মিটার
$\therefore$ ক্ষেত্রফল (10×5) বর্গ মি. $= 50$ বর্গ মি.
10% বৃদ্ধিতে দৈর্ঘ্য $= \left(10+10\times\frac{10}{100}\right)$ মি.
$= (10+1)$ মি.
$= 11$ মি.
10% হ্রাসে প্রস্থ $= \left(5-5\times\frac{10}{100}\right)$ মি.
$= \left(5-\frac{1}{2}\right)$ মি.
$= 4.5$ মি.
$\therefore$নতুন ক্ষেত্রফল $= (4.5\times11)$ বর্গ মি.
$= 49.5$ বর্গ মি.
ক্ষেত্রফল কমেছে $= (50-49.5)$ বর্গ মি.
$= 0.5$ বর্গ মি.
$= \frac{0.5}{50}\times100\%$
$= 0.01\times100\%$
$= 1\%$

৪০) গমে সুজির ও ভূষির অনুপাত $3:2$ হলে, গমে সুজির শতকরা পরিমাণ কত?

ক) 75% খ) 60% গ) 40% ঘ) 30%

উত্তর: খ) 60%

ব্যাখ্যা: সুজি : ভূষি $= 3:2$
মোট $= (3+2) = 5$

∴ গমে সুজির পরিমাণ $= \frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$

৪১) কোনো বর্গের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5% বৃদ্ধি পেলে এর ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

ক) 10% খ) 10.25% গ) 12.25% ঘ) 12.5%

উত্তর: খ) 10.25%

ব্যাখ্যা: মনে করি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ মি.

∴ ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ মি.

5% বৃদ্ধিতে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $= \left(a + a \times \frac{5}{100}\right)$ মি.

$= 1.05a$ মি.

বর্গক্ষেত্রটির পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল $= (1.05a)^2$ বর্গ মি.

$= 1.1025a^2$ বর্গ মি.

ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পাবে $= \frac{1.1025a^2 - a^2}{a^2} \times 100\% = 10.25\%$

৪২) ক্রিকেট খেলায় মাশরাফি, নাসির ও মুশফিক মোট 171 রান করলে এবং তাদের রানের অনুপাত $4:6:9$ হলে-

i) মাশরাফির রান 36 ii) নাসিরের রান 45 iii) মুশফিকের রান 81

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, iii খ) ii, iii গ) i, ii ঘ) i, ii, iii

উত্তর: ক) i, iii

ব্যাখ্যা: অনুপাতসমূহের যোগফল $= (4 + 6 + 9) = 19$

∴ মাশরাফির রান $= \frac{4}{19} \times 171 = 36$

নাসিরের রান $= \frac{6}{19} \times 171 = 54$

মুশফিকের রান $= \frac{9}{19} \times 171 = 81$

৪৩) 150 টাকা ক, খ ও গ এর মধ্যে $3:4:8$ অনুপাতে বন্টন করে নিলে-

i) 'ক' পাবে 30 টাকা ii) 'খ' পাবে 40 টাকা iii) 'খ' এর টাকা 'গ' এর অর্ধেক হবে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, iii খ) ii, iii গ) i, ii ঘ) i, ii, iii

উত্তর: ঘ) i, ii, iii

ব্যাখ্যা: ধরি, ক, খ, গ টাকা পাবে যথাক্রমে $3x, 4x$ ও $8x$

প্রশ্নমত, $3x + 4x + 8x = 150$

বা, $15x = 150$

বা, $x = 10$

'ক' পাবে $3x$ টাকা $= 3\times10 = 30$ টাকা
'খ' পাবে $4x$ টাকা $= 4\times10 = 40$ টাকা
এবং 'গ' পাবে $8x$ টাকা $= 8\times10 = 80$ টাকা
$\therefore$ 'খ' পাবে 'গ' টাকার অর্ধেক।

৪৪) একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং পরিসীমার অনুপাত কত?

ক) $2\sqrt{2}:1$ খ) $1:\sqrt{2}$ গ) $1:2\sqrt{2}$ ঘ) $1:4$

উত্তর: গ) $1:2\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$
পরিসীমা $= 4a$

$$\therefore \frac{\text{বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য}}{\text{পরিসীমা}} = \frac{\sqrt{2}a}{4a}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^4}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1:2\sqrt{2}$$

৪৫) লঘু অনুপাত বলা হয় যে অনুপাতের-

ক) পূর্ব রাশি $<$ উত্তর রাশি
খ) পূর্ব রাশি $>$ উত্তর রাশি
গ) উত্তর রাশি $=$ পূর্ব রাশি
ঘ) পূর্ব রাশি $=$ মধ্য রাশি $=$ উত্তর রাশি

উত্তর: ক) পূর্ব রাশি $<$ উত্তর রাশি

৪৬) গুরু অনুপাত বলা হয় যে অনুপাতের-

ক) পূর্ব রাশি $<$ উত্তর রাশি
খ) পূর্ব রাশি $>$ উত্তর রাশি
গ) উত্তর রাশি $=$ পূর্ব রাশি
ঘ) পূর্ব রাশি $=$ মধ্য রাশি $=$ উত্তর রাশি

উত্তর: খ) পূর্ব রাশি $>$ উত্তর রাশি

৪৭) নিচের কোনটি লঘু অনুপাত?

ক) $2:9$ খ) $6:6$ গ) $\frac{1}{2}:\frac{1}{5}$ ঘ) $10:7$

উত্তর: ক) $2:9$

ব্যাখ্যা: লঘু অনুপাতে-
পূর্ব রাশি $<$ উত্তর রাশি

৪৮) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{1}{3}$ হলে-

i) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{1}{3}$ ii) $\frac{ab}{bc} = \frac{1}{3}$ iii) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) i, ii ঘ) i, ii, iii

উত্তর: খ) i, iii

ব্যাখ্যা: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \dots\dots (ii)$ [যোজন বিয়োজন]

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

বা, $a = bk, c = dk$

$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$

যেহেতু $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{1}{3} \dots\dots (i)$

আবার, $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ $\frac{c}{d} = \frac{1}{3}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $3a = b$ বা, $3c = d$ বা, $a = \frac{bc}{d}$

বা, $a = \frac{bc}{3c} = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{ab}{bc} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{a}{c} = \frac{1}{3}$

বা, $3a = c$ যা সম্ভব নয়।

৪৯) একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 80 মিটার, এর প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 10% বাড়লে-

i) প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য হবে 88 মিটার

ii) এর ক্ষেত্রফল বাড়বে 21%

iii) এর কর্ণের দৈর্ঘ্য বাড়বে $10\sqrt{2}$ মিটার

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, ii গ) i, iii ঘ) i, ii, iii

উত্তর: ক) i, ii

ব্যাখ্যা: 10% বৃদ্ধিতে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য হবে $= \left(80 + 80 \times \frac{10}{100}\right)$ মি.

$= \left(80 + \frac{80}{10}\right)$ মি.

$= 88$ মি.

পূর্বের ক্ষেত্রফল $= (80)^2$ বর্গ মি.

$= 6400$ বর্গ মি.

নতুন ক্ষেত্রফল $= (88)^2$ বর্গ মি.

$= 7744$ বর্গ মি.

ক্ষেত্রফল বেড়েছে $= (7744 - 6400)$ বর্গ মি.

$= 1344$ বর্গ মি.

$= \frac{1344}{6400} \times 100\%$

$= 21\%$

পূর্বের কর্ণের দৈর্ঘ্য ছিল $= \sqrt{2} \times 80$ মি.

$= 80\sqrt{2}$ মি.

পরের কর্ণের দৈর্ঘ্য হবে $= \sqrt{2} \times 88$ মি.

$= 88\sqrt{2}$ মি.

$\therefore$ কর্ণের দৈর্ঘ্য বেড়েছে $= (88\sqrt{2} - 80\sqrt{2})$ মি.

$= 8\sqrt{2}$ মি.

৫০) 7 ঘন সে.মি. বস্তুর ওজন 21 ডেসি গ্রাম। বস্তুটির ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?

ক) 75% খ) 60% গ) 33% ঘ) 30%

উত্তর: ঘ) 30%

ব্যাখ্যা: 7 ঘন সে.মি. বস্তুর ওজন 21 ডেসি গ্রাম।

1 গ্রাম $= 10$ ডেসি গ্রাম

$\therefore$ 7 গ্রাম $= (7 \times 10)$ ডেসি গ্রাম

$= 70$ ডেসি গ্রাম

$\therefore \frac{21}{70} \times 100\% = 30\%$